

X: 辺AB, BC, CAがすべて D_r に含まれ、かつ r が最小の状態

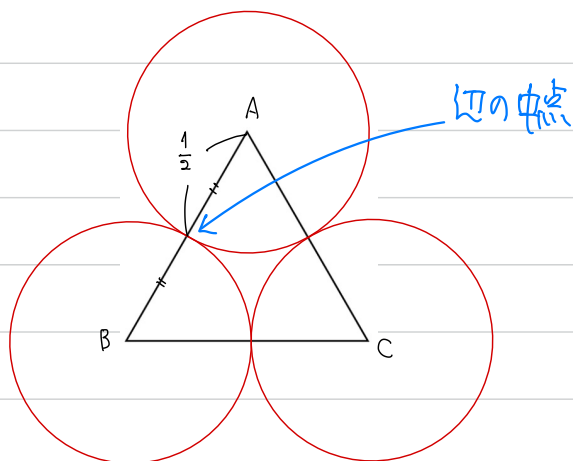
Y: $\triangle ABC$ が D_r に含まれ、かつ r が最小の状態

X

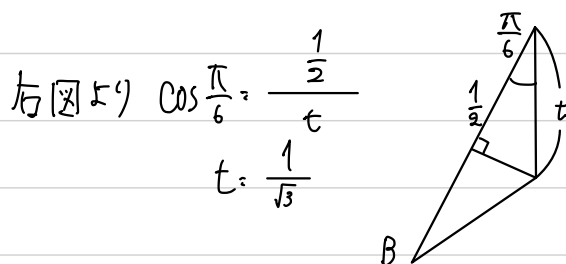
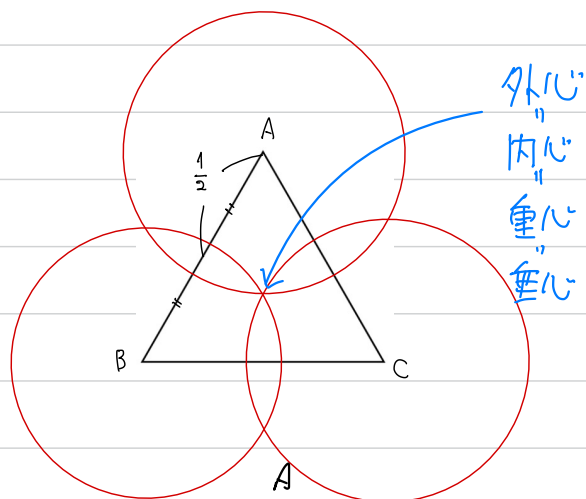
Yは右側に書きます。

(1) $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ のとき, $\triangle ABC$ は正三角形。

Xの状態の図は以下のよう。よって $r = \frac{1}{2}$ 。

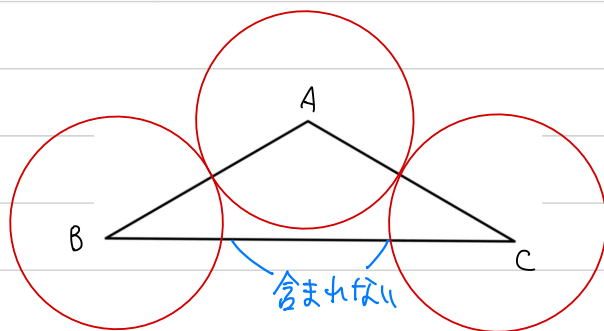


Yの状態は以下のよう。

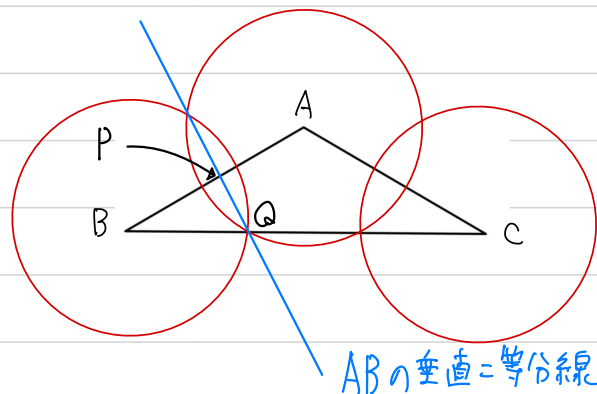


$$(2) \angle BAC = \frac{2}{3}\pi$$

(1)と同じように、半径 $\frac{1}{2}$ の円を描いてみる。
辺BCのまわ中回りも、 D_r に含まれない。



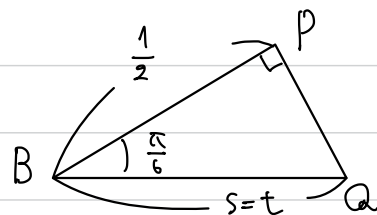
S, t. どちらに關しても、半径が小さすぎると、半径を大きくすると下図の半径の時、XとYが同時に起こる。つまり $r = t$



ABの垂直=等分線とAB, BCを通る点をP, Qとする。

$$BQ = \frac{\frac{1}{2}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$s = t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



2025年

東大数学

文系第2問②

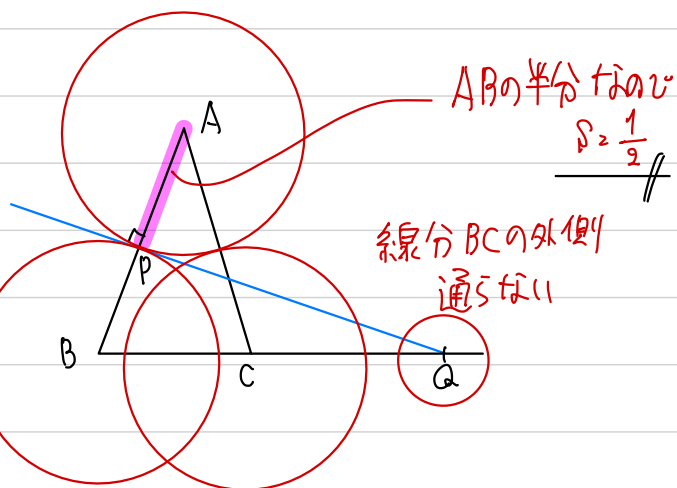
X, Sに関する考察

(1) では、ABの中点を通る時がXの状態だった。

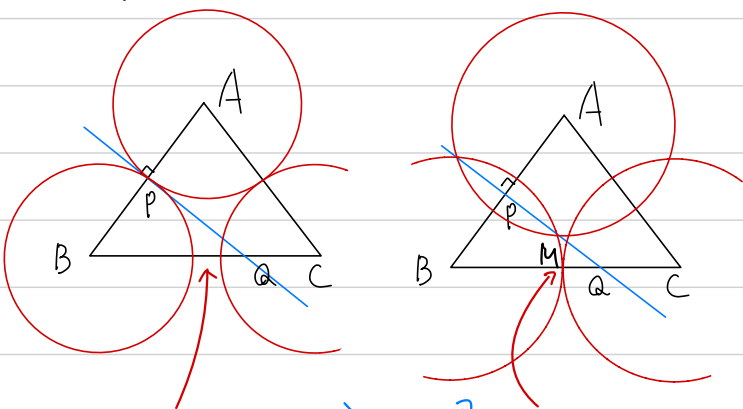
(2) では、Pを通るときは半径が小さすぎた。もう少し大きくして、Qを通るようにした。

⇒ BCの中点や、BCと垂直=等分点の交点 が、
場合分けの分岐点なのではないか。

(i) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$ のとき



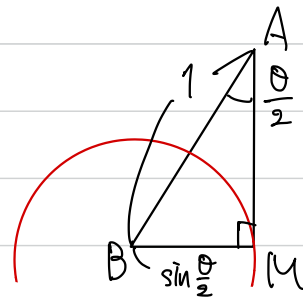
(ii) $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき



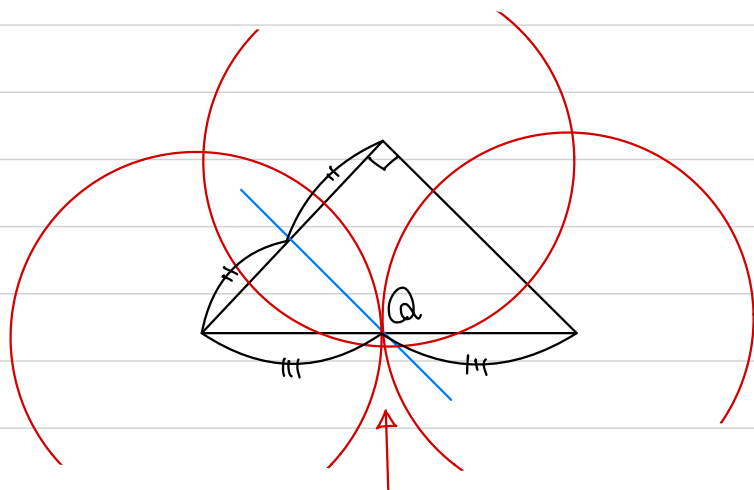
半径 $\frac{1}{2}$ ではスキマが 半径を大きくして、
スキマなし!! 中点を通る!!

このとき半径Sは

$$S = \sin \frac{\theta}{2} //$$

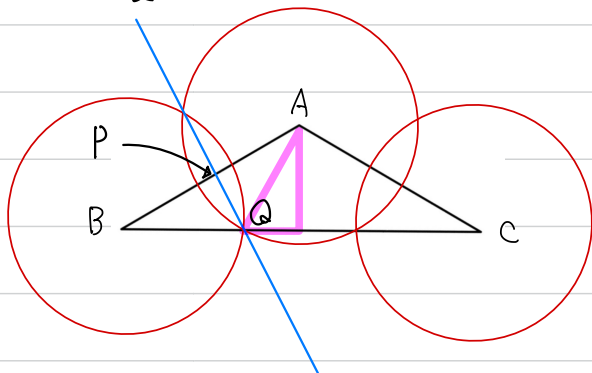


(iii) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき



Qと中点が一致する。場合分けの分岐

(iii) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

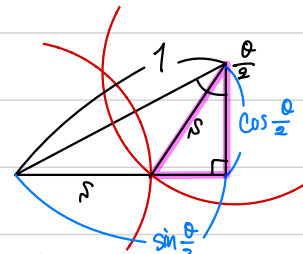


右の $\triangle$ について

三平方の定理より

$$(\cos \frac{\theta}{2})^2 + (\sin \frac{\theta}{2} - S)^2 = S^2$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2S \sin \frac{\theta}{2} + S^2 = S^2$$



$$\therefore S = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} //$$

$$\begin{cases} 0 < \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ のとき } S = \frac{1}{2} \\ \frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } S = \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のとき } S = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

2025年

東大数学

文系第2問③

Yとtに関する考察

(1) では、正三角形の“4心”を通る半径のとき、円の中心は、頂点からの2頂点から等距離の場所（つまり垂直二等分線上）が重要そう。というときは“4心”のうち、外心が鍵だろう。

(2) では、Pを通るときでは半径が小さすぎた。もう少し大きくして、Qを通るようにした。

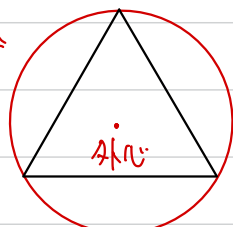
⇒ 外心、辺と垂直二等分線の交点が場合分けの分岐点なのではないか。

復

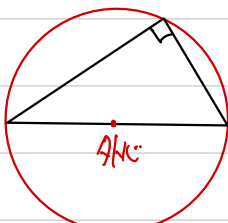
外心は、鋭角のとき、三角形の中

直角 : 辺上

鈍角 : 外



鋭角三角形



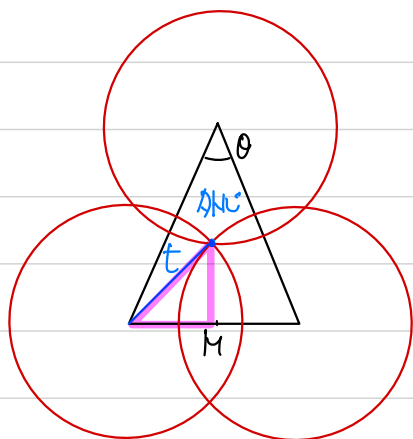
直角三角形



鈍角三角形

⇒ $0 < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \theta$ 場合分け。

(i) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

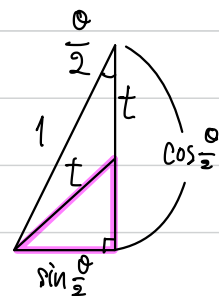
解法1 三平方を使う。

右の△に三平方の定理

$$\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{\theta}{2} - t\right)^2 = t^2$$

$$\underbrace{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}_{=1} - 2t \cos \frac{\theta}{2} + t^2 = t^2$$

$$\therefore t = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

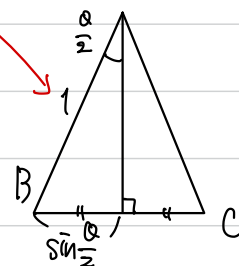
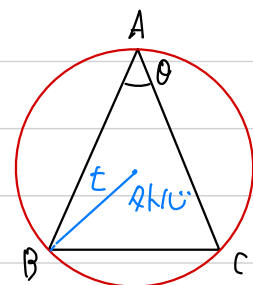
解法2 正弦定理を使う。

tは、△ABCの外接円の半径でもある。

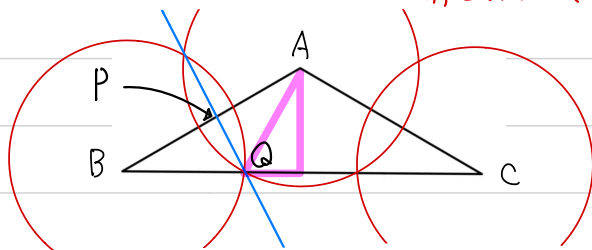
$$BC = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

正弦定理より、 $\frac{BC}{\sin \theta} = 2t$

$$t = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{2 \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$



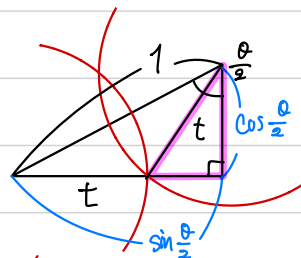
(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき、 $\nearrow$ Pを求めたときの(iii)と
ま、た同心（前ページ右）



右の△について
三平方の定理より
 $\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\theta}{2} - t\right)^2 = t^2$

$$\underbrace{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}_{=1} - 2t \sin \frac{\theta}{2} + t^2 = t^2$$

$$\therefore t = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$



$$\begin{cases} 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } t = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のとき } t = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \end{cases}$$